قوانين الجبر

أ/ ش. ترم ثاني

• أنواع المصفوفات:

① مصفوفة الصف: تحتوي على صف واحد. (١ ٣ ٥)

② مصفوفة العمود: تحتوي على عمود واحد. (٢ ٤)

③ المصفوفة المربعة: عدد الصفوف = عدد الأعمدة (٣ ٢ / ٥ ٤)

④ المصفوفة الصفرية: جميع عناصرها أصفار (٠ ٠ / ٠ ٠)

⑤ المصفوفة القطرية: مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفار ماعدا عناصر القطر الرئيسي (a_{11}، a_{22}، a_{33}) (١ ٠ ٠ / ٠ ٢- ٠ / ٠ ٠ ٣)

⑥ مصفوفة الوحدة I: مصفوفة قطرية كل عناصر القطر الرئيسي = ١ (١ ٠ / ٠ ١)

تساوي مصفوفتين:
- إذا كانا لهم نفس النظم
- العناصر المتناظرة متساوية

(٣ س / ٧ ٢) = (٣ ١ / ٧ ٢) ← س = ١، ص = ...

مدور المصفوفة أ على النظم م × ن هو $أ^{مد}$ ويكون على النظم ن × م، $(أ^{مد})^{مد} = أ$

أ = (٣ ٥ ١)، $أ^{مد}$ = (٣ / ٥ / ١)

المصفوفة المتماثلة: مصفوفة مربعة حيث $أ = أ^{مد}$، تماثل العناصر حول القطر الرئيسي (٥ ١- ٣ / ١- ٧ ٠ / ٣ ٠ ٥-)

المصفوفة شبه المتماثلة: مصفوفة مربعة حيث $أ = -أ^{مد}$، عناصر القطر الرئيسي أصفار (٠ ٢- ٤ / ٢ ٠ ٥- / ٤- ٥ ٠)

جمع وطرح المصفوفات:
- تكونا بنفس النظم
- الناتج مصفوفة بنفس النظم
- نقوم بجمع العناصر المتناظرة

(٢- ٣ / ٧ ٣) + (١ ٢ / ٢- ٠) = (٢- ١ / ٧ ٠)

$(أ + ب)^{مد} = أ^{مد} + ب^{مد}$ جمع المصفوفات عملية إبدالية

$(أ ب)^{مد} = ب^{مد} أ^{مد}$ ضرب المصفوفات عملية غير إبدالية

ضرب المصفوفات: لابد أن يكون: عدد أعمدة الأولى = عدد صفوف الثانية

أ × ب = (أ ب)
٣×٢ ، ٢×٢ ، ٣×٢

(٢ ٣ / ٥ ٧ / ١- ٤)(٦ ٨ / ٩ ٢-) = (٢×٦+٣×٩ ... / ٥×٦+٧×٩ ... / ١-×٦+٤×٩ ...)

قوانين الجبر

أ / كريم شاكر

المحددات

محدد الرتبة الثانية

اذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢×٢ فإن محدد أ يرمز له |أ|

$|أ| = \begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{vmatrix} = أ د - ب جـ$

محدد الرتبة الثالثة

يمكن فك محدد رتبة الثالثة بدلالة أي صف أو أي عمود

وحدد اشارة العنصر باستخدام قاعدة الإشارات

$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$ (قاعدة الاشارات)

محدد المصفوفة المثلثة

هي مصفوفة جميع عناصرها تحت القطر الرئيسي (أو فوقه) أصفار

قيمته = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي

$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ = −١ × ٣ × ٦ = −١٨

حل معادلتين في مجهولين بطريقة كرامر:

أ س + ب ص = م ، جـ س + د ص = ن (معاملات س ، معاملات ص)

$\Delta = \begin{vmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{vmatrix}$ (محدد المعاملات) ، $\Delta_س = \begin{vmatrix} م & ب \\ ن & د \end{vmatrix}$ (محدد المجهول س)

$\Delta_ص = \begin{vmatrix} أ & م \\ جـ & ن \end{vmatrix}$ ، $س = \frac{\Delta_س}{\Delta}$ ، $ص = \frac{\Delta_ص}{\Delta}$

خد بالك: $\Delta \neq$ صفر للمعادلتين حل وحيد

$\Delta =$ صفر فإن المعادلتين لهما عدد لا نهائي من الحلول أو ليس لها حل

حل المعادلات في ٣ مجاهيل بنفس الطريقة السابقة

$س = \frac{\Delta_س}{\Delta}$ ، $ص = \frac{\Delta_ص}{\Delta}$ ، $ع = \frac{\Delta_ع}{\Delta}$

مساحة Δ باستخدام المحددات

مساحة Δ (أ ، ب) ، (جـ ، د) ، (هـ ، و)

$= \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} أ & ب & 1 \\ جـ & د & 1 \\ هـ & و & 1 \end{vmatrix} \right|$ (القيمة المطلقة) (العمود الأخير واحد)

لاثبات أن النقاط تقع على استقامة واحدة نثبت أن:

$\begin{vmatrix} أ & ب & 1 \\ جـ & د & 1 \\ هـ & و & 1 \end{vmatrix}$ = صفر

اذا كانت أ مصفوفة على النظم ن × ن فإن

|ك أ| = $ك^ن$ |أ|

مثلاً أ مصفوفة على النظم ٣×٣ ، |أ| = ٣ فإن

|٥ أ| = 5^3 × |أ| = ١٢٥ × ٣ = ٣٧٥

$|أ^ن| = |أ|^ن$

|أ ب| = |أ| × |ب|

كيفية ايجاد المعكوس الضربي للمصفوفة:

اذا كانت أ = $\begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{pmatrix}$ فإن المعكوس الضربي للمصفوفة أ هو

$أ^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{pmatrix}$

بشرط محدد المصفوفة $\Delta \neq$ صفر

$أ \cdot أ^{-1} = أ^{-1} \cdot أ = I$

اذا كانت محدد المصفوفة = صفر فإن المصفوفة ليس لها معكوس ضربي

حل معادلتين في مجهولين باستخدام المعكوس الضربي للمصفوفة

أ س + ب ص = م ، جـ س + د ص = ن

أ = $\begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{pmatrix}$ (مصفوفة المعاملات) ، س = $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ (مصفوفة المجاهيل) ، جـ = $\begin{pmatrix} م \\ ن \end{pmatrix}$ (مصفوفة الثوابت)

أ س = جـ ⇐ س = $أ^{-1}$. جـ

خد بالك: س أ = جـ ⇐ س = جـ $أ^{-1}$

اذا كانت محدد المصفوفة Δ = صفر فإن المصفوفة ليس لها معكوس ضربي

قوانين الجبس

اث. ترم ثاني

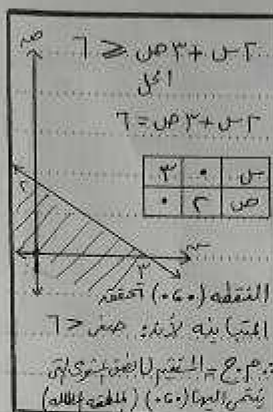
⇐ حل متباينة الدرجة الأولى في متغيرين بيانياً:

① نمثل معادلة المستقيم المرتبطة بالمتباينة

• الخط متصل ← في حالة علامة التباين (≥ ، ≤)

• الخط متقطع ← في حالة علامة التباين (> ، <)

② نحدد نصف المستوى الذي تقع فيه منطقة الحل وذلك بأخذ نقطة الأصل (٠، ٠) كنقطة اختبار ونعوض بها في المتباينة



٢س + ٣ص ≥ ٦

الحل

٢س + ٣ص = ٦

س	٠	٣
ص	٢	٠

النقطة (٠، ٠) تحقق المتباينة لأنها صفر ≥ ٦

∴ م . ح = المستقيم والنصف مستوى الذي ينتمي إليها (٠، ٠) (المنطقة المظللة)

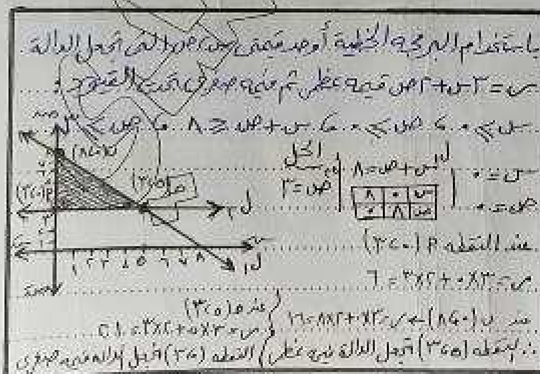
① المعادلة: ص = ٠ تمثل بيانياً محور السينات

② المعادلة: س = ٠ تمثل بيانياً محور الصادات

③ المعادلة: س = ا تمثل بيانياً مستقيم يوازي محور الصادات ويمر بالنقطة (ا، ٠)

④ المعادلة: ص = ب تمثل بيانياً مستقيم يوازي محور السينات ويمر بالنقطة (٠، ب)

⇐ البرمجة الخطية: تمثل المتباينات بحيث نحصل على منطقة مظللة (مجموعة الحل) ثم نعوض بإحداثيات رؤوس المنطقة المظللة في دالة الهدف لتحديد أكبر أو أصغر قيمة لدالة الهدف.



باستخدام البرمجة الخطية أوجد قيمتي س، ص التي تجعل الدالة ر = ٢س + ٣ص قيمة عظمى ثم مثلها بيانياً تحت القيود:

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ٨ ، ص ≤ ٣

الحل

س = ٠ ، ص = ٠ | س + ص = ٨ | ص = ٣

س	٠	٨
ص	٨	٠

عند النقطة ا (٠، ٣)

ر = ٢ × ٠ + ٣ × ٣ = ٩

عند ب (٨، ٠) ← ر = ٢ × ٨ + ٣ × ٠ = ١٦

عند ج (٥، ٣) ← ر = ٢ × ٥ + ٣ × ٣ = ١٩

∴ النقطة (٥، ٣) تجعل الدالة قيمة عظمى

قوانين حساب المثلثات

أ/ ث ٢ ثانى

⇐ المتطابقات المثلثية:

جا²θ + جتا²θ = ١ ← جا²θ = ١ − جتا²θ
← جتا²θ = ١ − جا²θ

(÷ جتا²θ)

ظا²θ + ١ = قا²θ ← قا²θ − ظا²θ = ١
← ظا²θ = قا²θ − ١

(÷ جا²θ)

١ + ظتا²θ = قتا²θ ← قتا²θ − ظتا²θ = ١
← ظتا²θ = قتا²θ − ١

عند الإثبات يفضل كتابة المقدار بدلالة جاθ، جتاθ فقط

$ظاθ = \frac{جاθ}{جتاθ}$

$ظتاθ = \frac{جتاθ}{جاθ}$

$قاθ = \frac{1}{جتاθ}$

$قتاθ = \frac{1}{جاθ}$

⇐ الحل العام للمعادلة المثلثية: α أصغر قياس موجب يحقق المعادلة، ن ∈ ص حيث ن ∈ ص

الحل العام للمعادلة جاθ = م	الحل العام للمعادلة جتاθ = م	الحل العام للمعادلة ظاθ = م
θ = α + ٢ن π ، θ = (π − α) + ٢ن π	θ = ± α + ٢ن π	θ = α + ن π

حل المثلث القائم الزاوية:

المقصود بحل Δ القائم هو معرفة أطوال أضلاعه وقياسات زواياه المجهولة

لاحظ أن: يمكن حل Δ القائم الزاوية إذا عرف
① طولا ضلعين فيه أو ② طول ضلع وقياس زاوية

زوايا الارتفاع والانخفاض:

• القطاع الدائري:

هو جزء من سطح الدائرة محدد بقوس ونصفي القطرين المارين بطرفي القوس.

$\frac{مساحة القطاع}{مساحة الدائرة} = \frac{قياس زاوية القطاع}{قياس الدائرة}$

محيط القطاع = ٢ نق + ل

مساحة القطاع

$= \frac{1}{2} θ^{د} نق^2$

$= \frac{س^{\circ}}{360} × π نق^2$

$= \frac{1}{2} ل نق$

التحويل من الستيني إلى الدائري: $θ^{د} = س^{\circ} × \frac{π}{180}$

التحويل من الدائري إلى الستيني: $س^{\circ} = θ^{د} × \frac{180}{π}$

قوانين حساب المثلثات

ث. ع. ثانى

⟸ القطعة الدائرية:

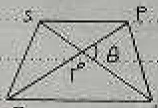


هي جزء من سطح الدائرة محدود بقوس فيها ووتر مار بنهايتي ذلك القوس.

- محيط القطعة الدائرية = طول القوس + طول الوتر
- مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2}$ نق^2 ($\theta^{د}$ − جا θ°)

المساحات

أولاً: مساحة المثلث



① م Δ أ ب جـ

= $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع المناظر لها

② م Δ أ ب جـ

= $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب ضلعين × جيب الزاوية بينهما

= $\frac{1}{2}$ × أ ب × ب جـ × جا ب

③ قاعدة هيرو: ع = $\frac{1}{2}$ محيط Δ

م Δ أ ب جـ = $\sqrt{ع(ع - أب)(ع - ب جـ)(ع - أ جـ)}$

④ مساحة Δ المتساوي الأضلاع

= $\frac{\sqrt{3}}{4}$ س^2 حيث س طول ضلعه

ثانياً: مساحة الشكل الرباعي:

مساحة الشكل الرباعي

= $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولي قطرية × جيب الزاوية بينهما

م الشكل أ ب جـ د = $\frac{1}{2}$ × أ جـ × ب د × جا θ

ملحوظة: (جا ۹۰ = ۱)

مساحة المربع

= $\frac{1}{2}$ مربع طول قطره

مساحة المعين

= $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولي قطريه

ثالثاً: مساحة المضلع المنتظم:

م المضلع المنتظم = $\frac{1}{4}$ ن س^2 ظتا $\frac{\pi}{ن}$

وعند حل المسائل من الأفضل أن نستخدم

= $\frac{1}{4}$ ن س^2 ÷ ظا $\frac{180}{ن}$

ن عدد الأضلاع
س طول الضلع

مساحة السداسي المنتظم = $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ س^2

قوانين الهندسة

اث. ترم ثاني

- القطعة المستقيمة الموجهة: $\overline{أب}$

هي قطعة مستقيمة لها نقطة بداية ونقطة نهاية وخط اتجاه.

ويرمز لها $\overline{أب}$ ، $\overline{أب} \neq \overline{ب أ}$

- تكافؤ قطعتين مستقيمتين موجهتين

اذا كان:

(1) لهما نفس الطول (المعيار)

(2) لهما نفس الاتجاه.

- متجه الموضع:

هو قطعة مستقيمة موجهة و

التي بدايتها نقطة الاصل

ونهايتها النقطة المعلومة ويرمز له $\overrightarrow{أ}$

- اذا كان: $\overrightarrow{أ} = (س ، ص)$ فإن:

(1) معيار المتجه

$\| \overrightarrow{أ} \| = \sqrt{س^2 + ص^2}$

(2) بدلالة متجهي الوحدة الاساسيين:

$\overrightarrow{أ} = س \overrightarrow{س} + ص \overrightarrow{ص}$

(3) الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هي:

$(\| \overrightarrow{أ} \| ، \theta)$ معيار ، زاوية

$ظا \theta = \frac{ص}{س}$

(4) الصورة الاحداثية للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هي:

$(\| \overrightarrow{أ} \| جتا \theta ، \| \overrightarrow{أ} \| جا \theta)$

متجه الوحدة:

هو متجه معياره = الواحد الصحيح

المتجه الصفري:

هو متجه معياره = صفر ويرمز له $\overrightarrow{0}$

- جمع المتجهات جبريا:

$\overrightarrow{أ} = (س_1 ، ص_1)$ ، $\overrightarrow{ب} = (س_2 ، ص_2)$

$\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} = (س_1 + س_2 ، ص_1 + ص_2)$

شرط تعامدهما	شرط توازي متجهين
$س_1 س_2 + ص_1 ص_2 = 0$	$\overrightarrow{أ} = (س_1 ، ص_1)$ ، $\overrightarrow{ب} = (س_2 ، ص_2)$
أو	الطرفين = الوسطين: $س_1 ص_2 - س_2 ص_1 = 0$
$م_1 \times م_2 = -1$	أو $م_1 = م_2$

- جمع المتجهات هندسيا:

(1) قاعدة المثلث (علاقة شال)

$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ب جـ} = \overrightarrow{أ جـ}$

$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ب جـ} + \overrightarrow{جـ أ} = \overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{أب} = - \overrightarrow{ب أ}$

(2) قاعدة متوازي الاضلاع

$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أ د} = \overrightarrow{أ جـ} = 2 \overrightarrow{أ م}$

حيث $\overrightarrow{أ م}$ متوسط في المثلث أ ب د

- طرح المتجهات هندسيا:

$\overrightarrow{أب} - \overrightarrow{أ جـ} = \overrightarrow{جـ ب}$

- اذا كانت أ $(س_1 ، ص_1)$ ، ب $(س_2 ، ص_2)$

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{أ جـ} + \overrightarrow{جـ ب}$ في الجمع البداية والنهاية	$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{ب جـ} = \overrightarrow{أ جـ}$ في الجمع النهاية = البداية

- اذا كان: $\overrightarrow{أ} = ك \overrightarrow{ب}$ فإن: $\overrightarrow{أ} \parallel \overrightarrow{ب}$

- $\| ك \overrightarrow{أ} \| = |ك| \cdot \| \overrightarrow{أ} \|$

- $\overrightarrow{أ} = (س ، ص)$ ميل $\overrightarrow{أ} = \frac{ص}{س}$

قوانين الهندسة

١ث . ترم ثاني

- احداثي نقطة منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(س١، ص١)، ب(س٢، ص٢)

منتصف $\overline{أب}$ = $\left(\frac{\text{مجموع السينات}}{٢} ، \frac{\text{مجموع الصادات}}{٢}\right)$

- تقسيم قطعة مستقيمة:

اذا كانت أ(س١، ص١)، ب(س٢، ص٢) وكانت جـ(س، ص) تقسم $\overline{أب}$ بنسبة ل١ : ل٢ فإن:

$س = \frac{ل_١ س_٢ + ل_٢ س_١}{ل_١ + ل_٢}$

$ص = \frac{ل_١ ص_٢ + ل_٢ ص_١}{ل_١ + ل_٢}$

- النقطة التي تقسم $\overline{أب}$ بواسطة محور السينات هي (س، ٠) أي ص = ٠
- النقطة التي تقسم $\overline{أب}$ بواسطة محور الصادات هي (٠، ص) تضع س = ٠

- احداثي نقطة تلاقي متوسطات △ أ ب جـ حيث أ(س١، ص١)، ب(س٢، ص٢)، جـ(س٣، ص٣) هي:

م = $\left(\frac{\text{مجموع السينات}}{٣} ، \frac{\text{مجموع الصادات}}{٣}\right)$

- ميل الخط المستقيم م

① بمعلومية النقطتين (س١، ص١)، (س٢، ص٢)

م = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

مثلا: (٢، ٣)، (٥، ٤) ← م = $\frac{٤ - ٣}{٥ - ٢} = \frac{١}{٣}$

② م = ظا θ

③ الذي معادلته أس + ب ص + جـ = ٠

م = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-أ}{ب}$

④ الذي معادلته: ص = أس + جـ

م = معامل س = أ

⑤ الذي متجه اتجاهه ى = (أ، ب)

م = $\frac{ص}{س} = \frac{ب}{أ}$

لاحظ أنه:

اذا كان ميل المستقيم م فإنه:

ميل الموازي له هو م

ميل العمودي عليه هو $\frac{-١}{م}$

- من الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم:

① المعادلة العامة للمستقيم هي:

أس + ب ص + جـ = ٠

② معادلة المستقيم بدلالة الميل (م) والجزء المقطوع من الصادات = (جـ)

ص = م س + جـ

③ معادلة المستقيم بمعلومية الجزئين المقطوعين مع محوري الاحداثيات:

$\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$

(أ: المقطوع من محور السينات، ب: المقطوع من محور الصادات)

قوانين الهندسة

الث. ترم ثاني

④ المعادلة المتجهة :

ر = أ + ك ى

أي أن : (س ، ص) = (س١ ، ص١) + ك (أ ، ب)

⑤ المعادلتان البارامتريتان (الوسيطتان)

س = س١ + أ ك

ص = ص١ + ب ك

⑥ المعادلة الكارتيزية (الصورة العامة)

(ص − ص١) / (س − س١) = م

• قياس الزاوية بين مستقيمين

ظا θ = | (م١ − م٢) / (١ + م١ م٢) | حيث θ ∈ [٠ ، π/٢]

إذا كانت : ظا θ =

= صفر
فإن الزاوية بين المستقيمين = صفر
ويكونا مستقيمين
متوازيان أو منطبقان

غير معرف
فإن الزاوية بين
المستقيمين = ٩٠°
ويكونا مستقيمين
متعامدان

لإيجاد الزاوية المنفرجة
نوجد الحادة ثم نطرح من ١٨٠°

• طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم :

أ(س١ ، ص١)

أ س + ب ص + جـ = ٠

ل = | أ س١ + ب ص١ + جـ | / √(أ² + ب²)

طول العمود المرسوم من نقطة الأصل (٠ ، ٠) هو :

ل = | جـ | / √(أ² + ب²)

طول العمود المرسوم من نقطة (س١ ، ص١) على :

محور السينات = | ص١ |

محور الصادات = | س١ |

• المعادلة العامة لأي خط مستقيم مار بنقطة تقاطع المستقيمين

أ١ س + ب١ ص + جـ١ = ٠ ، أ٢ س + ب٢ ص + جـ٢ = ٠

• ويمر بالنقطة (س١ ، ص١) هي

أ١ س + ب١ ص + جـ١ + ك (أ٢ س + ب٢ ص + جـ٢) = ٠

• ومنها نوجد قيمة ك

طريقة أخرى : بإيجاد نقطة تقاطع المستقيمان عن طريق حل المعادلتين جبرياً أو بطريقة الحذف ثم إيجاد معادلة المستقيم عن طريق نقطة التقاطع والنقطة التي يمر بها المستقيم

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

موقع الدكتور محمد رزق التعليمي



امسح الباركود بالموبيل لتثبيت
التطبيق وتحميل كل الملازم مجانا وبسرعه



حمل التطبيق الأن





كورسات ونتائج امتحانات



ملازم ثانـــــوي



ملازم اعدادي



ملازم ابتدائي





موقع الدكتور محمد رزق

Dr.Mo.RizK